

ベーシックセンター

数学 I・A

図形と計量・平面図形(7)「方べきの定理」

円に内接する四角形 ABCD の辺の長さを、それぞれ

$$AB = 4, BC = 3, CD = 2, DA = 6$$

とする。2 直線 BC と AD の交点を E とし、2 直線 AB と DC の交点を F とする。

以下の を埋めよ。ただし、 ① と ⑥ ~ ⑧ については、当てはまるものを記号 A~G を用いて答えよ。

- (1) $EC = x, ED = y$ とおけば、相似な二つの三角形 \triangle ① と $\triangle ABE$ との対応する辺の比はみな等しいから

$$x:2 = (y + \text{ ②}):4$$

$$y:2 = (x + \text{ ③}):4$$

が成り立つ。ゆえに $x = \text{ ④}$ である。さらに

$$EC \cdot EB = \text{ ⑤} \dots \text{㉞}$$

である。同様に

$$FC \cdot FD = \frac{160}{9} \dots \text{㉟}$$

である。

- (2) 点 G を、 $\triangle FBC$ の外接円と直線 EF との交点で F とは異なる点とすれば、

$$\text{ ⑥} \cdot EF = EC \cdot EB \dots \text{㊱}$$

である。また、4 点 F, G, C, B は同一円周上にあり、4 点 A, B, C, D も同一円周上にあるから

$$\angle FGC = \angle \text{ ⑦} = \angle EDC$$

となる。これにより 4 点 E, D, C, G は同一円周上にあることがわかる。したがって、

$$\text{ ⑧} \cdot FE = FC \cdot FD \dots \text{㊲}$$

となる。㉞, ㉟, ㊱, ㊲により

$$EF = \frac{2}{3} \sqrt{\text{ ⑨}}$$

である。