

ベーシックセンター

数学 I・A

整数の性質(1)「最大公約数と最小公倍数・互除法」

次の を埋めよ.

- (1) 2つの正の整数 a, b が

$$a < b, a + b = 1995 \quad \cdots \text{Ⓐ}, a \text{ と } b \text{ の最小公倍数は } 8820 \quad \cdots \text{Ⓑ}$$

を満たすとする.

a と b の最大公約数を g と書くことにすると, a と b は互いに素な整数 a', b' を用いて

$$a = ga', b = gb'$$

と表される。これをⒶ, Ⓑに代入すると

$$g(a' + b') = 1995, ga'b' = 8820$$

となるが, a' と b' が互いに素であるとき, $a' + b'$ と $a'b'$ も互いに素であることを考えると

$$g = \text{Ⓐ}, a' + b' = \text{Ⓑ}, a'b' = \text{Ⓒ}$$

$a < b$ より, $a' < b'$ なので, $(a', b') = (\text{Ⓓ}, \text{Ⓔ})$

よって, $(a, b) = (\text{Ⓕ}, \text{Ⓖ})$ である.

- (2) 方程式 $\text{Ⓕ}x + \text{Ⓒ}y = 3 \quad \cdots \text{Ⓒ}$ の整数解について考える.

$$\text{Ⓒ} = \text{Ⓕ} \times \text{Ⓖ} + \text{Ⓓ} \quad (\text{ただし } 0 \leq \text{Ⓓ} < \text{Ⓕ})$$

$$\text{Ⓕ} = \text{Ⓓ} \times \text{Ⓗ} + 3$$

であるから

$$3 = \text{Ⓕ} \times \text{Ⓗ} + \text{Ⓒ} \times (\text{Ⓙ})$$

となる. Ⓒの解の1つとして $(x, y) = (\text{Ⓙ}, \text{Ⓚ})$ が得られる.