

ベーシックセンター

数 学 I・A

整数の性質(2)「整数方程式(1)」

次の を埋めよ.

- (1) 方程式 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ …① ($0 < m \leq n$) の整数解を求めよう.

①の分母を払うと, $mn - 2m - 2n = 0$ となり, これを変形すると

$$(m - \text{①})(n - \text{②}) = \text{③}$$

となる.

よって①の整数解は

$$m, n = (\text{④}, \text{⑤}), (\text{⑥}, \text{⑦})$$

である. (ただし $\text{④} < \text{⑥}$ とする.)

- (2) 方程式 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ …② ($0 < l \leq m \leq n$) の整数解を求めよう.

($0 < l \leq m \leq n$) より $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{l}$ なので

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l}$$

が成り立つ. この式の左辺に②を代入すると

$$l \leq \text{⑧}$$

となるので, 条件を満たす l は $l = \text{⑨}, \text{⑩}, \text{⑪}$ である.

(ただし, $\text{⑨} < \text{⑩} < \text{⑪}$ とする.)

$l = \text{⑪}$ のとき, ②に代入して整理すると

$$(\text{⑫}m - \text{⑬})(\text{⑭}n - \text{⑮}) = \text{⑯}$$

となる.

$l = \text{⑨}, \text{⑩}$ のときも考えて, ②の解は

$$(l, m, n) = (\text{⑰}, \text{⑱}, \text{⑲}), (\text{⑳}, \text{㉑}, \text{㉒}),$$
$$(\text{㉓}, \text{㉔}, \text{㉕})$$

である. (ただし, $\text{㉕} < \text{㉒} < \text{⑲}$ とする.)